分子生物物理学予習課題

この演習課題は講義の中で出てくる基本的な数式を理解するためのものです。講義開始時までに、課題を解いて講義に臨むと理解度が格段に違います。完璧に解けなくても結構です。挑戦してから受講することを推奨します。本課題の解答は、講義の前週に web サイト掲示し、講義でも詳しく解説します。

参考書

原島・堀著（2004)、「工学基礎　ラプラス変換と z 変換」数理工学社

田代　著（2004)、「ラプラス変換とフーリエ解析要論（第 2 版)」森北出版

Ⅰ　下の設問①～③に答えよ。　＜自己相関関数・相互相関関数に関する演習＞

① 次の数式が成立することを示せ。

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}\sin\omega t\cdot\sin(\omega t+\tau)\,dt \quad = \quad \frac{1}{2}\cos\tau$$

② ２つの関数、$f(t)=A\sin\omega t$ と $g(t)=B\sin(\omega t-\delta)$ があるとする。下の式で定義される R_{ff}（自己相関関数)、および、R_{fg}（相互相関関数）は、それぞれ ω、δ、τ のどのような式で表わされるか。前問①の式を参考にして答えよ。ただし、$\langle x(t)\rangle$ といった表記は期待値で、$x(t)$ の時間的な平均値を意味する。

$$R_{ff} \quad = \quad \langle f(t)\cdot f(t)\rangle \quad = \quad \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(t)\cdot f(t+\tau)\,dt$$

$$R_{fg} \quad = \quad \langle f(t)\cdot g(t)\rangle \quad = \quad \lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(t)\cdot g(t+\tau)\,dt$$

③ 上の計算結果をもとに、R_{ff} と τ、および R_{fg} と τ との関係を図示せよ。

Ⅱ　下の設問①～④に答えよ。　＜フーリエ変換に関する演習＞

①以下の式が成立することを示せ。ただし、m と n は、正の整数値である。

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\cos mt\cdot\cos nt\,dt \quad = \quad \left\langle \begin{array}{ll} 0 & (m\neq n\text{ のとき}) \\ \pi & (m=n\text{ のとき}) \end{array}\right.$$

②同様にして、下の２つの式が成立することを示せ。

a) $$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mt \cdot \sin nt \; dt \quad = \quad \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$

b) $$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mt \cdot \cos nt \; dt = \quad 0$$

③ $f(t) = \sum_{k=1}^{k=N} a_k \sin kt + b_k \cos kt$ とする。このとき次の積分計算の結果はどのような値となるか。前問の①～②の計算結果を参考にして答えよ。ただし、k と $j\ (1 \leq j \leq N)$ は正の整数値とする。

a) $$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot \cos jt \; dt$$

b) $$\int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \cdot \sin jt \; dt$$

Ⅲ　下の式(1)で表わされる関係が $f(t)$、$g(t)$ の間に成立しているものとする。以下の設問①～③に答えよ。　　＜伝達関数に関する演習＞

$$\frac{d}{dt} g(t) = a \cdot f(t) - b \cdot g(t) \qquad \cdots \quad 式(1)$$

ただし、 $f(t) = A_i \cdot \sin \omega t$ 、$g(t) = A_0 \sin(\omega t + \delta)$

① $G^2 = \dfrac{A_0^2}{A_i^2}$ とすると、G を、a 、b 、ω で表記せよ。また、δ は、a 、b 、ω とどのような関係にあるか示せ。

② 上の式(1)は、あるブラックボックスへの入力信号 $f(t)$ と、それに対して出力される出力信号 $g(t)$ との関係を示しているものとする。このとき、G は、入力された信号の振幅に対して出力される信号の振幅比（*Gain*， 増幅率)、δ は、出力信号の遅延（*Delay*，位相遅れ）を意味する。上の計算結果をもとに G および δ が、それぞれ ω とどのような関係にあるか、概要を図示せよ。描いた図より、このブラックボックスの出力が、必ずしも入力信号を忠実に反映したものではないことが理解できるであろう。その応答特性・応答性能について考察せよ。

③ 下のような酵素反応において、物質Ｂの濃度を $g(t)$ とする。その変化速度、$\frac{d}{dt} g(t)$ を示す式が、上の式(1)と同じ形式となることを確認せよ。また、このとき、式(1)中の定数 a 、b は、速度定数、k_{+1}、k_{-1} を使ってどのように表わされるか示せ。

$$\mathrm{A} \quad \underset{k_{-1}}{\overset{k_{+1}}{\rightleftarrows}} \quad \mathrm{B}$$

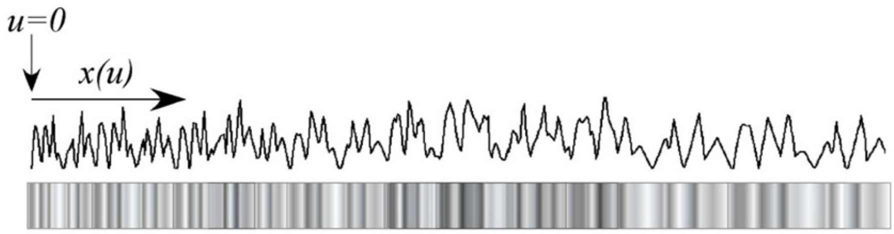
Ⅳ　図Ａで示すような濃度パターンを持った試料がある（例えば電気泳動のパターンなど）。このパターンの濃度変化は、左端の$u=0$を基点として、関数$x(u)$で表現できるものとし、図Ａの上側に示すような波形となる。以下の設問①～②に答えよ。　＜畳み込み積分に関する演習＞

① 図Ｂは、この試料を一定速度（$v=1$）で左側へ移動させ、同時に手前に置かれた幅の狭い（幅が無視できるほど狭い）スリットを通して観察される部分の濃度を光センサーで計測する実験である。試料の左端がスリットの部分を通過する時点を$t=0$として計測を始めた。計測される信号の波形は、どのような関数になるか。

② 図Ｃは、上と同様に試料を一定速度（$v=1$）で左側に移動させながら、幅dのスリットを通して濃度を計測した場合である。試料の左端がスリット右端を通過する時点を$t=0$として計測を始めた。計測される信号の波形は、どのような関数になるか。

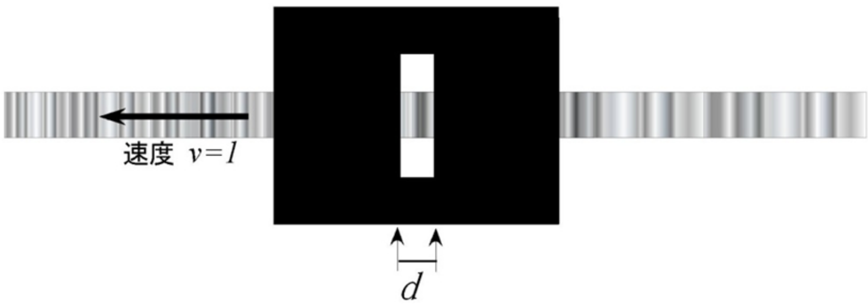
③ 図Ｄは、上と同様に試料を一定速度（$v=1$）で左側に移動させながら、右から左に向かって関数$g(u)$で表現されるような透過率をもつフィルターを通して濃度を計測した場合である。試料の左端がスリット右端を通過する時点を$t=0$として計測を始めた。計測される信号の波形は、どのような関数になるか。

図Ａ



図Ｂ

図Ｃ



図D